حوزه بسیج دانشجویی دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
پایگاه هوافضا

دینامیک

کارشناسی

دانشکده هوافضا - دانشگاه صنعتی خواجه نصیر

مدرس : دکتر مونین زاده

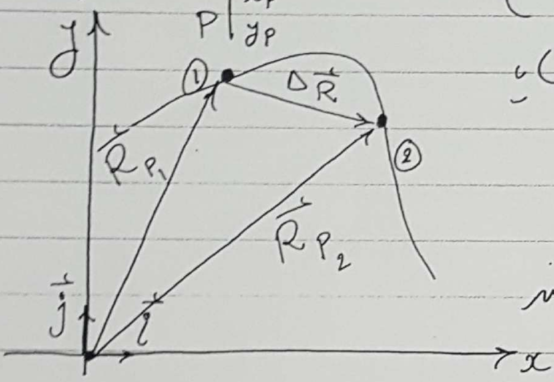
Scanned by CamScanner

بخش اول : سینماتیک

فصل ۱) سینماتیک ذره

۱-۱) مفهوم حرکت

در صفحه (xy) نقطه P را بعنوان یک نقطه مادی در مختصات (x_p , y_p) فرض کنید:



✓ موقعیت نقطه P را با بردار موقعیت یا بردار مکان نمایش میدهیم.

✓ اگر نقطه P از ① به ② حرکت کند تغییر موقعیت $\Delta\vec{R}$ خواهد داشت.

این مقدار تغییر موقعیت بستگی به مسیر ندارد.

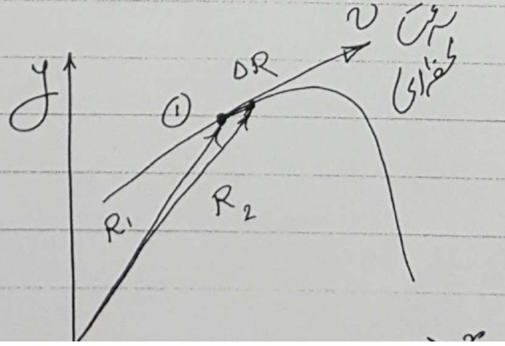
و با مدت زمان حرکت برای این تغییر موقعیت کار خواهیم.

$$\vec{R}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j}$$

$$\begin{cases} \Delta\vec{R} = \vec{R}_{P_2} - \vec{R}_{P_1} \\ \Delta t : \text{زمان حرکت} \end{cases}$$

✓ سرعت ذره P طبق تعریف تغییرات موقعیت آن در واحد زمان است.

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$$



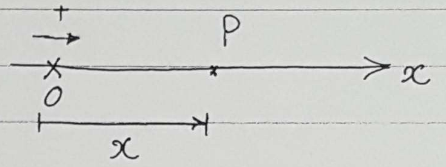
$$\bar{V} = \frac{\Delta R}{\Delta t}$$ سرعت متوسط

✓ یک خواص مهم سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر حرکت.

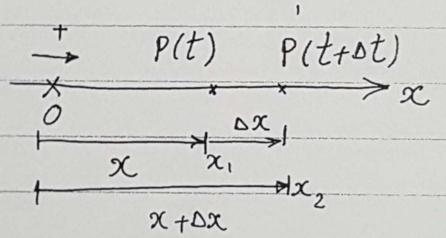
۲-۱) حرکت مستقیم الخط

وقتی یک نقطه مادی در امتداد خط مستقیم حرکت کند، نوع حرکت را مستقیم الخط گویند.

✓ در این نوع از حرکت، انتخاب مبدا حرکت روی محور و جهت ⊕ حرکت الزامی است.



✓ در حالت حرکت جسم، در هر لحظه از زمان (t) نقطه مادی P یک موقعیت مشخص نسبت به مبدا



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{سرعت متوسط} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$$

مثال) ذره‌ای فاصله بین دو نقطه AB را با سرعت‌های ثابت به ترتیب زیر طی می‌کند:

$1/3$ فاصله را با سرعت v، $2/3$ مابقی را با سرعت $1/3\, v$، مطلوبست محاسبه سرعت متوسط:

$$\bar{v} = \frac{AB}{\Delta t_{AB}} = \frac{\frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}AB}{\Delta t_{1/3} + \Delta t_{2/3}} = \frac{1/3\,AB + 2/3\,AB}{\frac{1/3\,AB}{v} + \frac{2/3\,AB}{1/3\,v}} = 3/7\, v$$

✓ حال اگر تغییرات مکان نقطه مادی P را بخواهیم در مدت زمان کوتاه (dt) بررسی کنیم،

به مفهوم سرعت لحظه‌ای خواهیم رسید.

Scanned by CamScanner

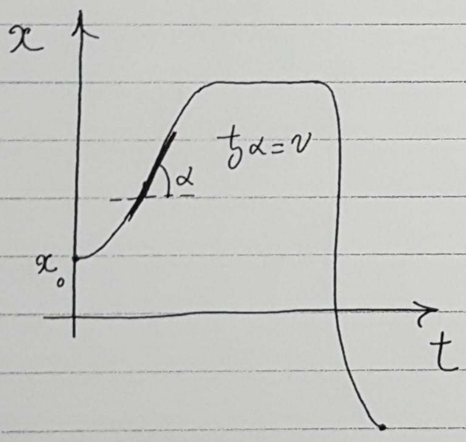
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

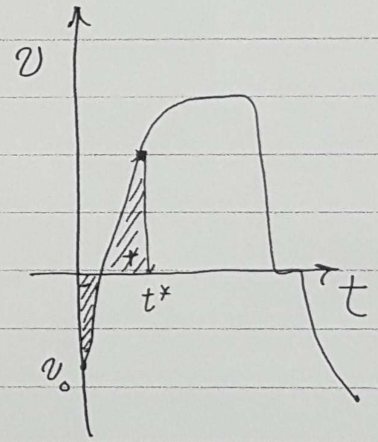
$$v = \frac{dx}{dt}$$ سرعت لحظه‌ای

$$dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} ds = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau$$

✓ نمودار تغییر مکان برحسب زمان و نمودار تغییر سرعت برحسب زمان:





✓ با فرض ثابت بودن v خواهیم داشت:

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau = v\int_{t_0}^{t} d\tau$$

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$x = v(t - t_0) + x_0$$ معادله حرکت

$$t_0 = 0 \Rightarrow x = vt + x_0$$

Scanned by CamScanner

✓ اگر در حرکت مستقیم الخط سرعت نیز تغییر کند، آنگاه بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 شتاب متوسط به

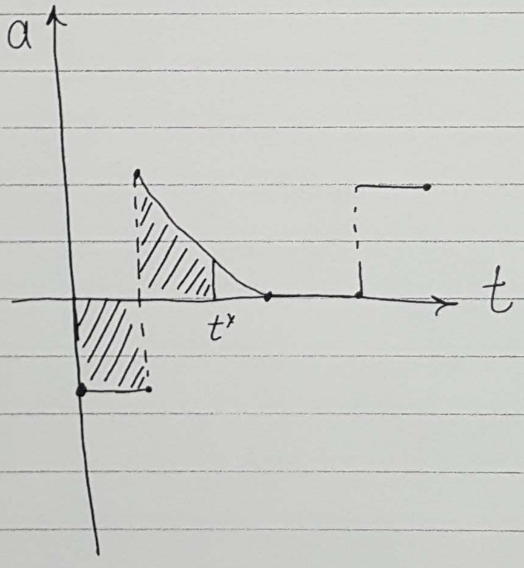
چنین تعریف می‌شود:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$ شتاب لحظه‌ای

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = \dfrac{dx}{dt} \\ \\ a = \dfrac{dv}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{v\,dv = a\,dx}$$ رابطهٔ مستقل از زمان



$$dv = a\,dt$$

$$\boxed{v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,d\tau}$$

(ادامه حرکت مستقیم الخط)

۱-۲-۱ حالت‌های ممکن در حرکت مستقیم الخط

$$v = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

الف) $a = f(t)$

فرض کنید در یک مسئله شتاب تابعی از زمان داده شده باشد.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow dv = f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v\,dt \rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

ب) $a = f(x)$

$$v\,dv = a\,dx \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v(s)}$$

ج) $a = f(v)$

$$v\,dv = a\,dx$$

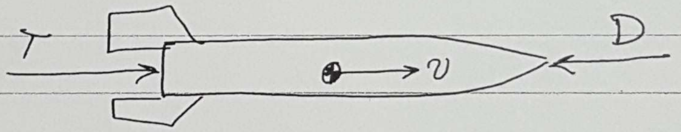
$$v\,dv = f(v)\,dx \Rightarrow dx = \frac{v\,dv}{f(v)} \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{u\,du}{f(u)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow f(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{du}{f(u)}$$

P

مثال) یک موشک در حال پرواز افقی دارای سرعت v و شتاب a است. اگر در اثر مقاومت هوا تغییرات شتاب موشک بصورت $a = \alpha - \beta v^2$ که در آن β, α ثابت‌های معلوم هستند، باشد. مطلوبست تغییرات سرعت برحسب مکان.

$$a = \alpha - \beta v^2$$



$$v\,dv = a\,dx$$

$$v\,dv = (\alpha - \beta v^2)\,dx \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{u}{\alpha - \beta u^2}\,du$$

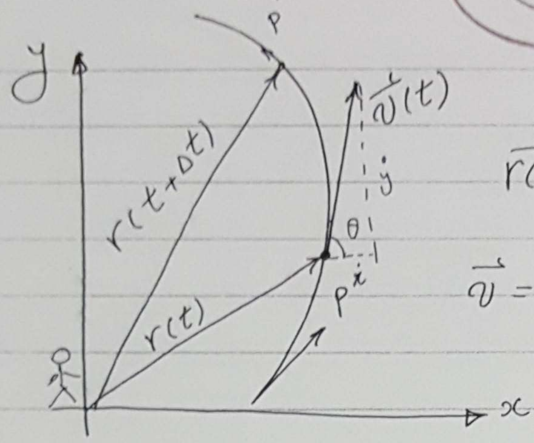
$$x - x_0 = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1}{\alpha - \beta u^2}\Bigg|_{v_0}^{v} \qquad x_0 = 0,\quad v_0 \neq 0$$

$$x = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\alpha - \beta v_0^2}{\alpha - \beta v^2} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta v^2}{\alpha - \beta v_0^2} = e^{-2\beta x}$$

$$\alpha - \beta v^2 = (\alpha - \beta v_0^2)\,e^{-2\beta x} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left\{\alpha - (\alpha - \beta v_0^2)\,e^{-2\beta x}\right\}^{1/2}$$

Scanned by CamScanner

۱-۲) حرکت در صفحه



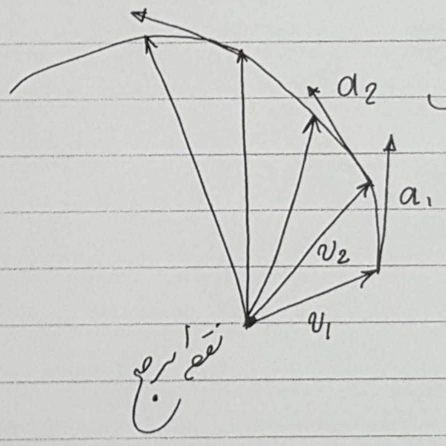
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad ✓$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$✓ \quad tg\,\theta = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{dy}{dx}$$

✓ سرعت‌های قابل محاسبه نسبت به مبدا مختصات سنجیده می‌شوند.

✓ سیر هودوگراف



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

✓ در مختصات کارتزین:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

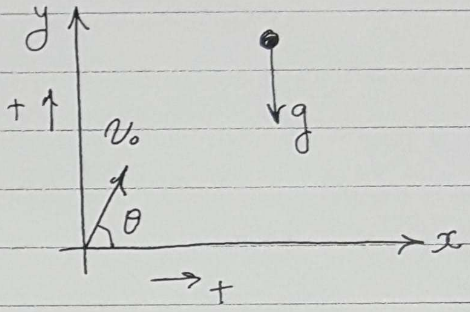
✓ در مسائل و پدیده‌های فیزیکی، جسم ابتدا شتاب را حس می‌کند، پس سرعت آن ایجاد می‌شود و در نهایت احساس تغییر مکان می‌کند.

ادامه حرکت در صفحه $(x-y)$

این حرکت را می‌توان به حالت‌های زیر که در طبیعت رخ می‌دهد تقسیم کرد:

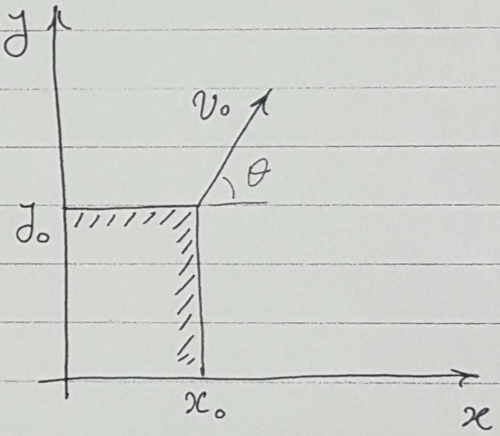
(۱) حرکت یک جسم به صورت پرتابه در خلاء؛

$$\begin{cases} a_x = 0 \rightarrow \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \rightarrow v_x - v_{x_0} = 0 \\ a_y = -g \rightarrow \dfrac{dv_y}{dt} = -g \rightarrow v_y - v_{y_0} = -gt \end{cases}$$



معادلات سرعت پرتابه

$$\begin{cases} v_x = v_{x_0} \\ v_y = -gt + v_{y_0} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \rightarrow x - x_0 = v_{x_0} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_{y_0} \rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y_0} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_{x_0} t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y_0} t + y_0 \end{cases} ; \quad v_{x_0} = v_0 \cos\theta , \quad v_{y_0} = v_0 \sin\theta$$

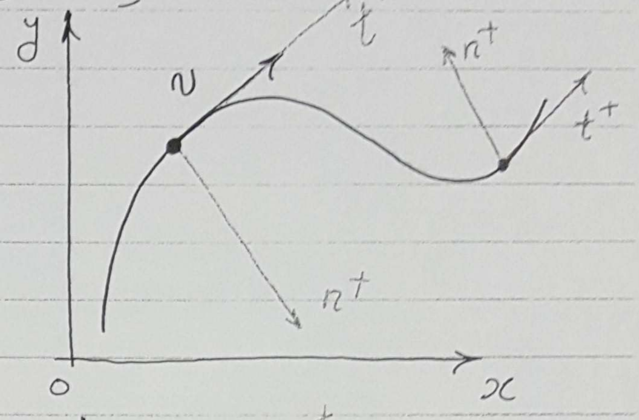
Scanned by CamScanner

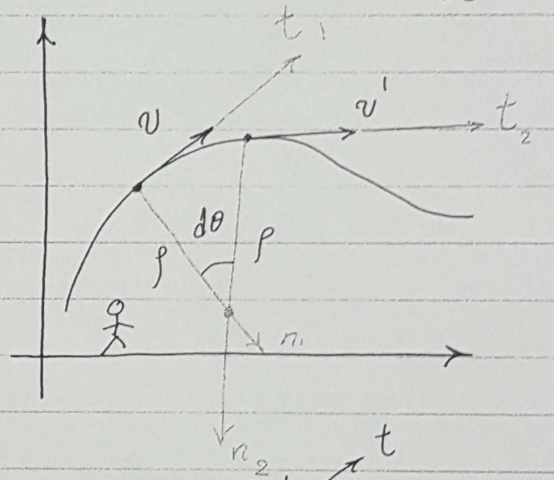
۱-۴) مختصات (n-t) یا مختصات مسیری

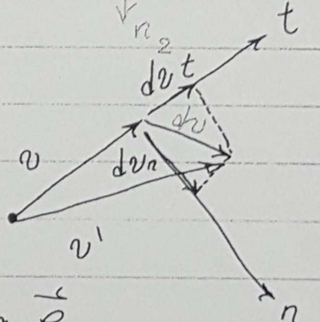
✓ این دستگاه مختصات یکی از مهم ترین دستگاه مختصات برای تحلیل دینامیک یک جسم در فضا است.

✓ این مختصات همیشه چسبیده به جسم است که روی مرکز ثقل وسیله متحرک قرار داده می‌شود.

✓ محور t آن در جهت سرعت و n عمود بر سرعت به سمت داخل منحنی است.







$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta}$$

ρ : انحنای مسیر

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه‌ای نسبت به مرکز انحنا

v : سرعت لحظه‌ای جسم

$$\begin{cases} \vec{dv} = \vec{dv_t} + \vec{dv_n} \longrightarrow \vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n \\ |\vec{dv_n}| = v\,d\theta \longrightarrow a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v\,d\theta}{dt} = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = v^2/\rho \\ |\vec{dv_t}| = d(\rho\dot{\theta}) \longrightarrow a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d(\rho\dot{\theta})}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_n$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t)$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + v\,\dot{\vec{e}}_t$$

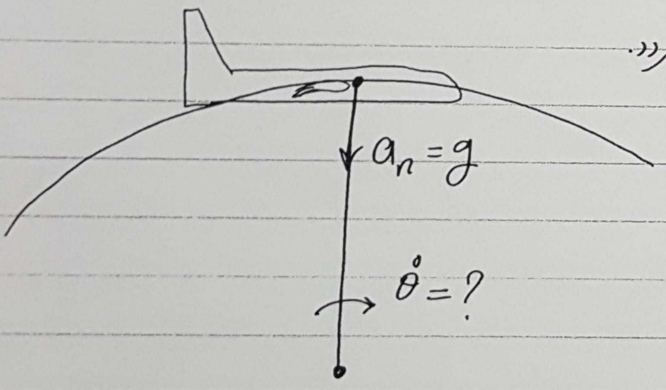
e_t, de_t, e_t

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_t = \dot{\theta}\,\vec{e}_n \\ \dot{\vec{e}}_t = v/\rho\,\vec{e}_n \end{cases}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + v^2/\rho\,\vec{e}_n$$

مثال) هواپیمایی روی مسیری با سرعت $720\ km/h$ در حال حرکت است. برای آزمایش شرایط بی‌وزنی هواپیما باید

$\dot{\theta}$ حرکت تا این شرایط بی‌وزنی ایجاد گردد.



$a_n = v\dot{\theta}$

$g = v\dot{\theta}$

$$\boxed{\dot{\theta} = g/v} = \frac{9.81}{720}(3.6)\ rad/s$$

تمرین‌های پیشنهادی از کتاب مریام ویرایش ۵

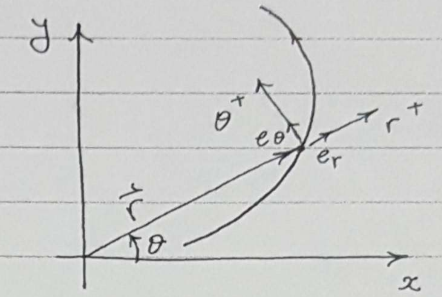
۱-۷	۲-۳	۲-۲۲	۲-۳۶	۲-۵۶	۸۷	۱۱۰*
۱-۱۰	۲-۷	۲-۲۴	۲-۳۹	۲-۵۷	۹۴*	۱۱۱
۱-۱۲	۲-۱۲	۲-۲۷	۲-۴۲	۲-۵۸	۹۵	۱۱۶
	۲-۱۳	۲-۲۹	۲-۴۴	۶۴	۱۰۱	۱۲۴*
	۲-۱۴	۲-۳۱	۲-۴۶	۶۹	۱۰۵	۱۲۷*
	۲-۱۷	۲-۳۳	۲-۴۸	۷۶*	۱۰۹*	۱۳۰
	۲-۲۰	۲-۳۴	۲-۵۱	۸۴		

Scanned by CamScanner

۱-۵) حرکت در مختصات (r,θ)

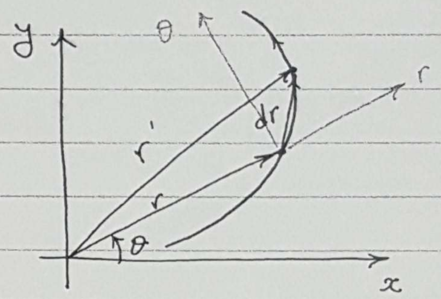
✓ مختصات (r,θ) مختصاتی است که جسم پیچیده و ... حرکت می‌کند.

✓ جهت r^+ در امتداد بردار موقعیت جسم و جهت θ^+ عمود بر آن و در جهت قراردادی است.



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{dr} = \vec{dr}_r + \vec{dr}_\theta$$

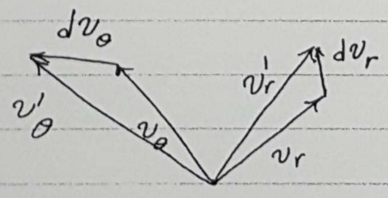


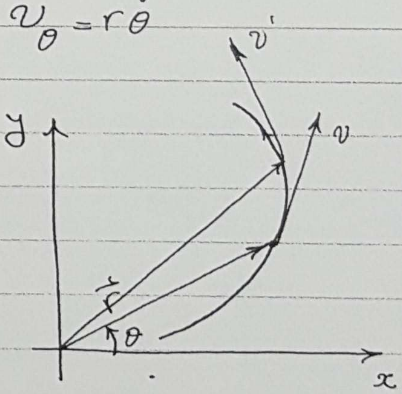
$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \quad ; \quad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad v_r = \dot{r} \ , \ v_\theta = r\dot{\theta}$$





$$dv_r \begin{cases} (dv_r)_r = dv_r = d\dot{r} \\ (dv_r)_\theta = v_r d\theta = \dot{r}\, d\theta \end{cases}$$

$$dv_\theta \begin{cases} (dv_\theta)_r = dv_\theta = d(r\dot{\theta}) \\ (dv_\theta)_\theta = v_\theta d\theta = r\dot{\theta}\, d\theta \end{cases}$$

$$\vec{a}_r = a_r\vec{e}_r = (dv_r)\vec{e}_r + (dv_\theta)_r\vec{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r$$

$$\vec{a}_\theta = a_\theta\vec{e}_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{d}{d\theta}(r\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$2\dot{r}\dot{\theta}$ ← شتاب کوریولیس

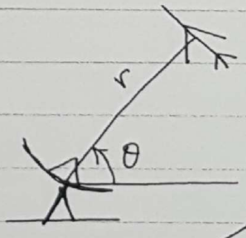
جمع‌بندی:

$r = r$

اگر $r=r(t)$ و $\theta=\theta(t)$ حرکت یک جسم مشخص باشد، آنگاه سرعت و شتاب آن را محاسبه کرد.

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$



حل

مثال) در شکل زیر، یک لغزنده داخل یک دسته شیاردار در حال حرکت و دسته نیز حول محور O در دوران است. سرعت دورانی دسته شیاردار 80 rpm، شتاب زاویه‌ای آن −280 rpm/s

موقعیت لغزنده در لحظه نشان داده شده 0.25 m، سرعت آن −0.3 m/s نسبت به شیار و

شتاب نسبت به شیار صفر است.

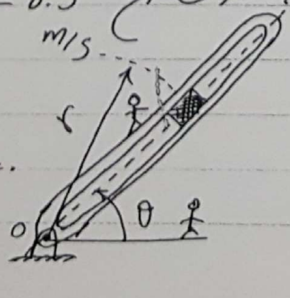
مطلوب: شتاب کل لغزنده نسبت به اینرسی

$\dot{\theta} = 80\ rpm$

$\ddot{\theta} = -280\ rpm/s$

$r = 0.25\ m \qquad \ddot{r} = 0$

$\dot{r} = -0.3\ m/s$

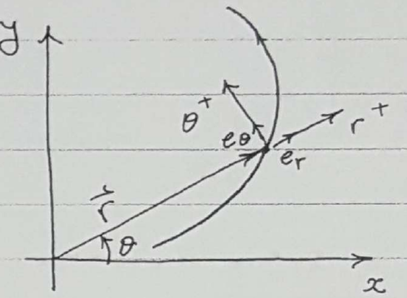


$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -17.55 \ m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -18.36 \ m/s^2$$

$$\vec{a} = -17.55\,\vec{e}_r - 18.36\,\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$u = \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$v = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \ddot{x} = a_x = \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\ddot{y} = a_y = \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

مسائل تمرینی

۲-۱۳۱	۲-۱۵۹
۱۳۴	۲-۱۶۰
۱۳۸	۲-۱۶۳
۱۴۰	۲-۱۶۴
۱۴۸	۲-۱۶۵
۱۵۴	

Scanned by CamScanner

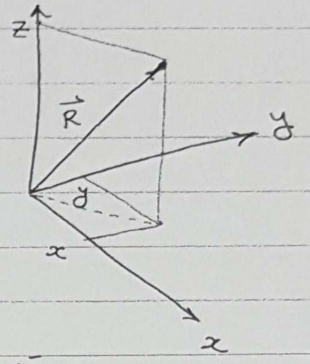
۱-۶) حرکت نقطه مادی در سه بعد

۱-۶-۱) حرکت در مختصات کارتزین

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



۱-۶-۲) حرکت در مختصات استوانه‌ای (r,θ,z)

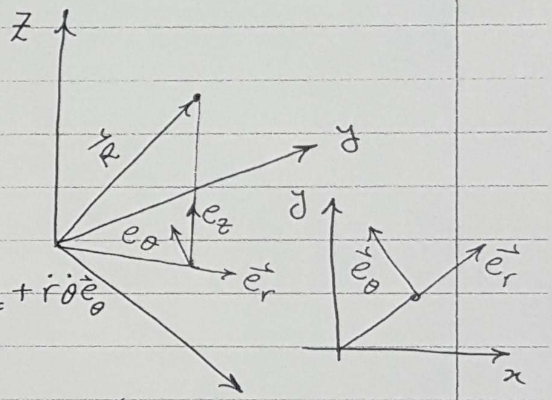
$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

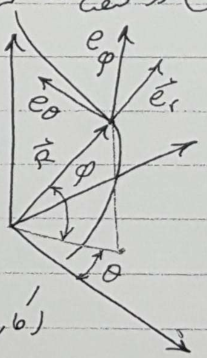


۱-۶-۳) حرکت در مختصات کروی (r,θ,φ)

$$\vec{R} = R\vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\vec{e}}_r$$

$$= \dot{R}\vec{e}_r + R\dot{\theta}C\varphi\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

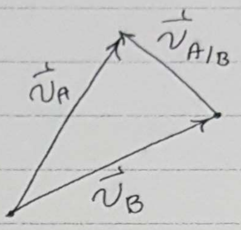


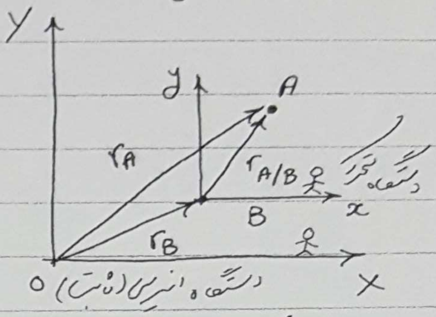
$$\vec{a} = a_R\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$ (کار در منزل)

۷-۱) حرکت نسبی

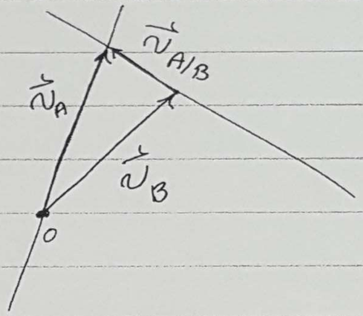
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$





مثال) فرض کنید $\vec{v}_B$ معلوم باشد جهت $v_{A/B}$ و v_A معلوم باشد. مطلوبست حل شکل.



(ادامه حرکت نسبی)

۷- سرعت A نسبت به B همیشه در جهت $\vec r_{A/B}$ نیست. بلکه می‌تواند در این حالت هر مولفه‌ای داشته باشد.

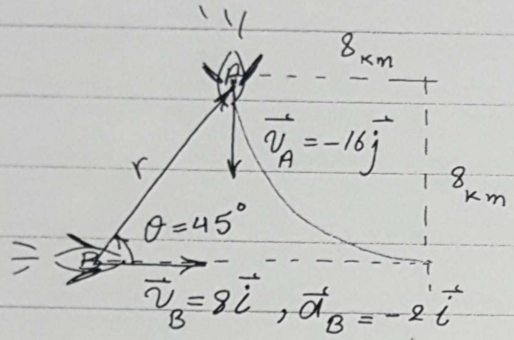
مثال) دو قایق نسبت به هم در حال حرکت هستند (مطابق شکل زیر).

الف) $\vec v_{A/B}$

ب) $\dot r, \dot\theta$ نسبت به ناظر B

ج) $\vec a_{A/B}$

د) $\ddot r, \ddot\theta$ نسبت به B

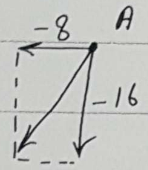


$\vec v_B = 8\vec i \;,\; \vec a_B = -2\vec i$

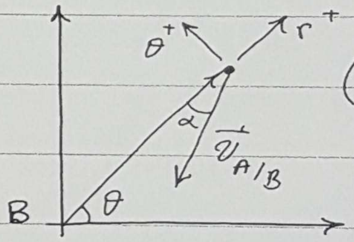
الف)

$\vec v_A = \vec v_B + \vec v_{A/B}$

$-16\vec j = 8\vec i + \vec v_{A/B} \rightarrow \vec v_{A/B} = -8\vec i - 16\vec j$

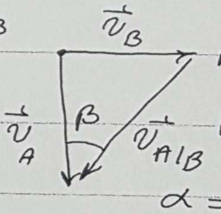


ب)



$$\begin{cases} \vec v_r = -v_{A/B}\cos\alpha\, \vec e_r \\ v_\theta = -v_{A/B}\sin\alpha\, \vec e_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec v_r = \dot r\, \vec e_r \rightarrow \dot r = -8.73\ m/s \\ \vec v_\theta = r\dot\theta\, \vec e_\theta \rightarrow \dot\theta = -0.686\ rad/s \times 10^{-3} \end{cases}$$



$\beta = \tan^{-1}\frac{v_B}{v_A}$

$\beta = 26.57°$

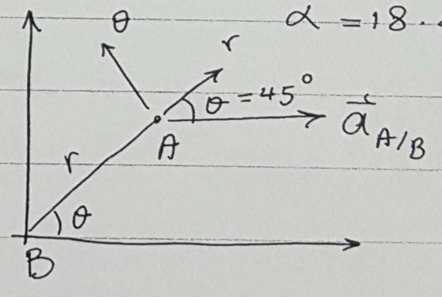
$\alpha = \theta - \beta$

$\alpha = 18.43°$

ج)

$\vec a_{A/B} = \vec a_A - \vec a_B \;;\; \begin{cases} \vec a_A = \frac{v_A^2}{\rho}\vec i \\ \vec a_B = -2\vec i \end{cases}$

$\vec a_{A/B} = (\frac{v_A^2}{\rho} + 2)\vec i$



د)

$$\begin{cases} a_\theta = -0.0281\ m/s^2 = \ddot r - r\dot\theta^2 \\ a_r = 0.0281\ m/s^2 = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta \end{cases}$$

$\ddot r = 0.0301\ m/s^2$

$\ddot\theta = -9.44\ rad/s \times 10^{-6}$

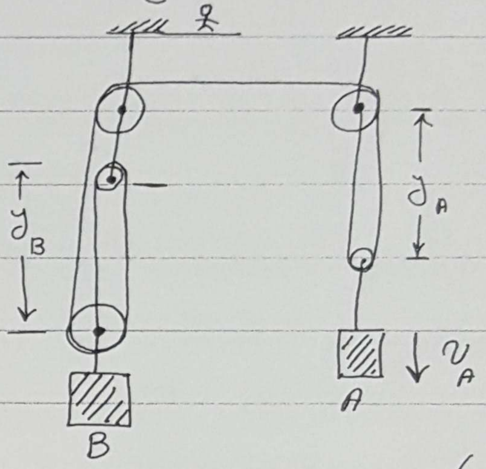
Scanned by CamScanner

۱۰-۱) حرکت اجسام متصل مقید

✓ اگر مسائل اجسام متصل مقید، بشکل اتصال جرم، طناب و قرقره هستند.

✓ در این مسائل طول طناب ثابت است.

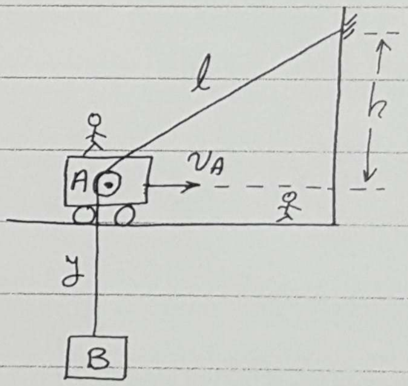
✓ طول هر طناب با جمع جبری طولهای تشکیل دهنده سیستم هستند.



$$L = 2y_A + 3y_B + K$$

$$0 = 2\dot{y}_A + 3\dot{y}_B \Rightarrow \begin{cases} v_A = -\frac{3}{2} v_B \\ v_B = -\frac{2}{3} v_A \end{cases}$$

مثال)



$$L = y + l$$

$$L = y + \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$0 = \dot{y} + \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$v_{B/A} = \dot{y} = \frac{-x\dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} \quad ; \quad v_A = \dot{x}$$

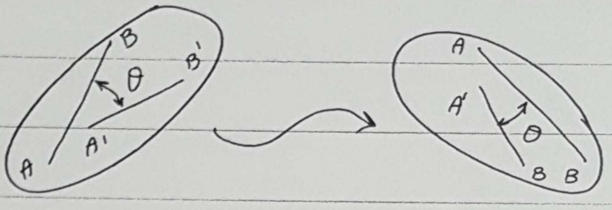
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

۲-۱۷۰	۲-۱۸۷	۲-۲۱۳	۲-۲۲۷
۱۷۴	۱۹۰	۲۱۴	۲۳۰
۱۷۶	۱۹۴	۲۱۹	۲۳۲
۱۸۲	۱۹۷	۲۲۱	۲۲۹
۱۸۴	۱۹۹ *	۲۲۲ *	۲۳۴
	۲۰۴		۲۴۶
			۲۴۹

فصل ۲) سینماتیک اجسام صلب

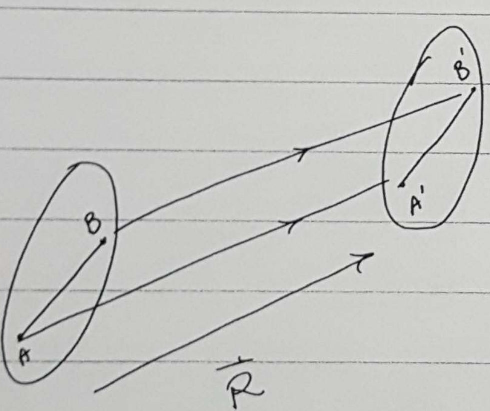
۲-۱) مقدمه

در این فصل هدف بررسی و تحلیل سینماتیک (موقعیت، سرعت و شتاب) اجسام صلب انجام می‌شود.
جسم صلب به جسمی گفته می‌شود که در فرآیند حرکت داخل جسم تغییر ابعاد داده نشود. یا به عبارتی از نظر ریاضی
اگر دو خط فرضی AB، $A'B'$ دارای زاویه اولیه θ در جسم باشند، بعد از فرآیند حرکت این زاویه حفظ گردد.



۲-۲) انواع حرکت

الف) حرکت مستقیم (انتقالی روی راستای یک خط مستقیم)



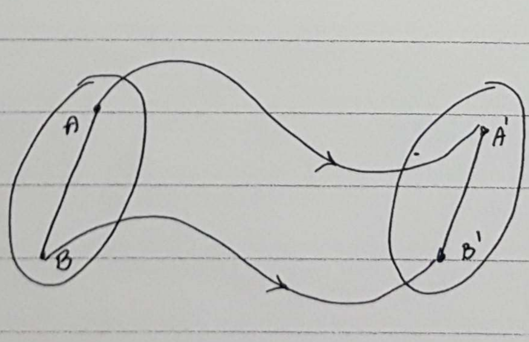
$AB \parallel A'B'$

$AA' \parallel BB'$

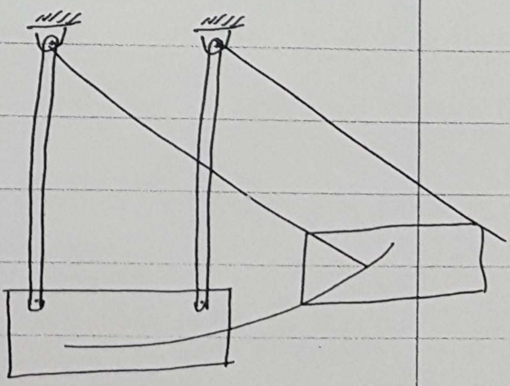
قوانین سینماتیک آن به قوانین مستقیم الخط نقطه مادی است.

$$v = \frac{dx}{dt} \; ; \; a = \frac{dv}{dt}$$

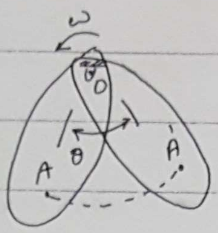
ب) حرکت انتقالی روی مسیر انحنا



$AB \parallel A'B$



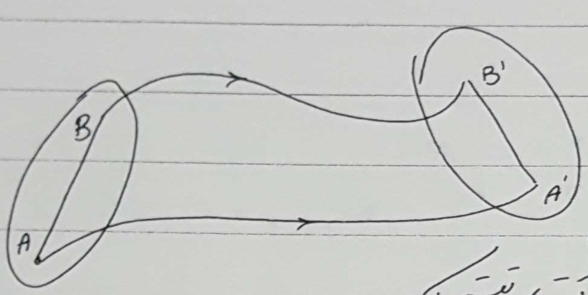
ج) حرکت دورانی

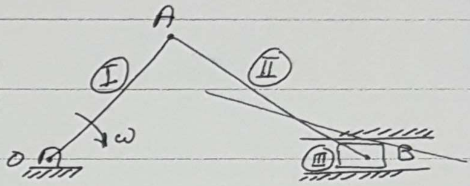


$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

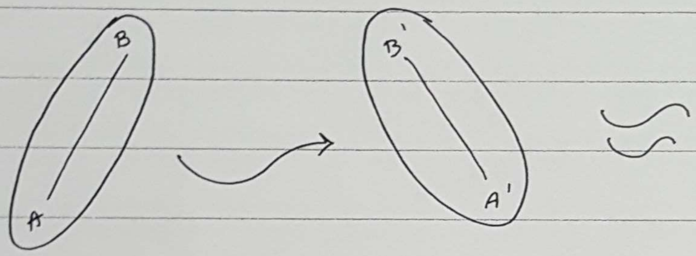
$$v = r\omega$$

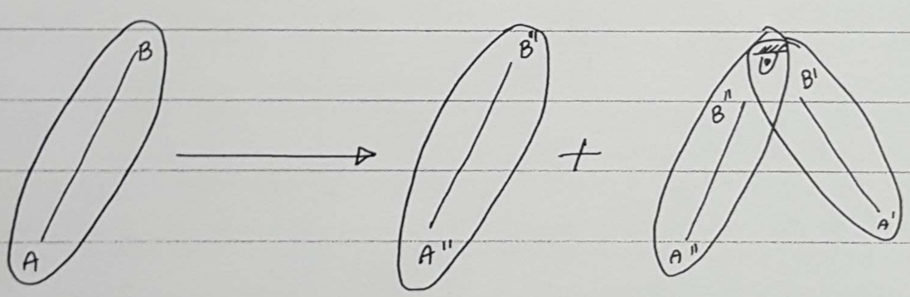
د) حرکت عمومی در صفحه





بعضی از حرکت‌های عمومی را میتوان به ۲ حرکت تقسیم کرد.





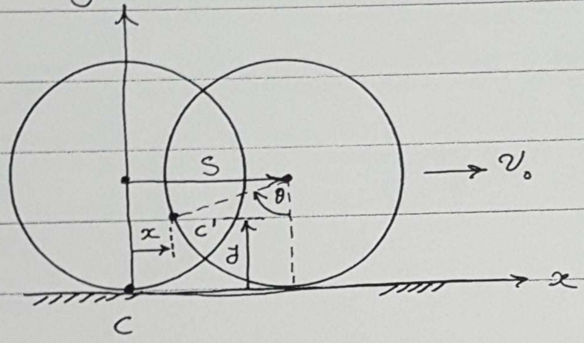
۲-۳) تحلیل سرعت اجسام صلب

برای تحلیل و بررسی سینماتیک اجسام صلب با توجه به اینکه اعضاء تشکیل دهنده یک سیستم صلب فرض می‌شود می‌توان با توجه به نوع حرکت یک رابطهٔ هندسی برای چند نقطه نوشت. معمولاً در مکانیزم‌ها (لینک‌بندی‌ها) نقاط مهم سیستم تشکیل یک شکل را می‌دهند که بعضی از زوایا و ضلع‌های آن شکل در اثر حرکت سیستم تغییر خواهند یافت. با مشتق‌گیری از رابطهٔ هندسی به یک رابطهٔ سرعتی اعضاء خواهیم رسید.

برای بررسی به شکل‌های زیر دقت کنید.

مثال) هدف تحلیل سرعت یک نقطهٔ اختیاری روی دیسکی که با سرعت v_0 روی یک سطح افقی بدون لغزش حرکت می‌کند.

تحلیل نقطهٔ c:



$$\begin{cases} x_c = S - r\sin\theta \\ y_c = r - r\cos\theta \end{cases}$$

$$S = r\theta$$

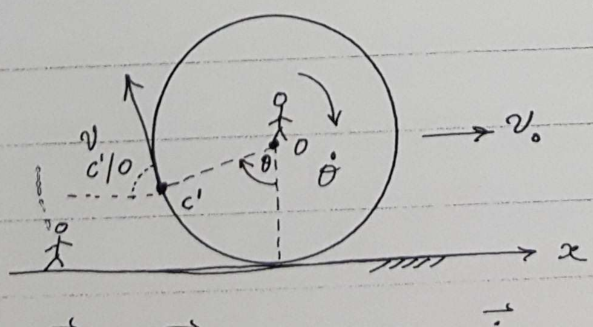
$$\dot{S} = r\dot{\theta} = v_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{S} - r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_c = 0 + r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = v_0(1-\cos\theta) \\ \dot{y}_c = v_0\sin\theta \end{cases} \quad \vec{v}_c = \dot{x}_c\,\vec{i} + \dot{y}_c\,\vec{j}$$

$$\ddot{x}_c = v_0(\dot{\theta}\sin\theta) = v_0\dot{\theta}\sin\theta$$

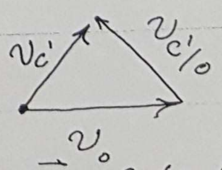
$$\ddot{y}_c = v_0\dot{\theta}\cos\theta \quad \rightarrow \quad \vec{a}_c = \ddot{x}_c\,\vec{i} + \ddot{y}_c\,\vec{j}$$

روش ترسیمی:



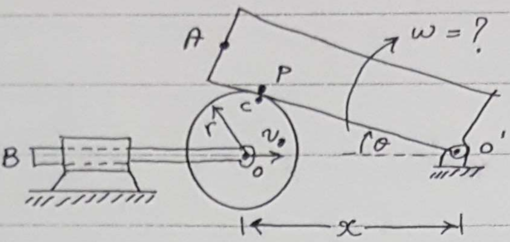
$$\vec{v}_{c'} = \vec{v}_o + \vec{v}_{c'/o} \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{r}$$

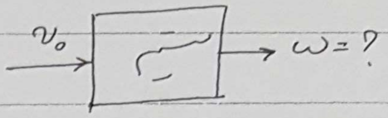
روش برداری:



$$\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i} \quad ; \quad \vec{v}_{c'/o} = -v_0\cos\theta\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_{c'} = v_0(1-\cos\theta)\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j}$$

شکل)





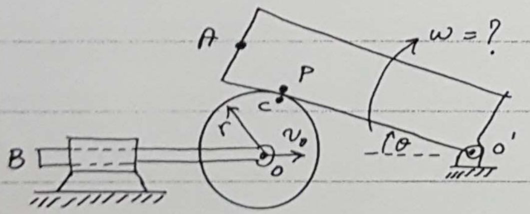
روش اول $\overset{\Delta}{OCO'}$:
$$tg\theta = \frac{r}{PO'} = \frac{r}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\dot\theta(1+tg^2\theta) = \frac{-r\frac{x\dot x}{\sqrt{x^2-r^2}}}{x^2-r^2} \quad ; \quad \omega = \frac{-rx\dot x}{\left(1+\frac{r^2}{x^2-r^2}\right)(x^2-r^2)\sqrt{x^2-r^2}}$$

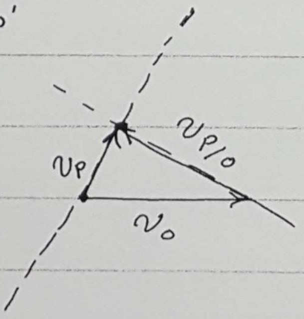
$$\omega = \frac{-rx\dot x}{(x^2-r^2)\sqrt{x^2-r^2}+r^2\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{-r\dot x}{x\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\omega = \frac{-rv_0}{x\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{r}{x} \rightarrow \dot\theta\cos\theta = \frac{-r\dot x}{x^2} \rightarrow \omega = \frac{-r\dot x}{x^2\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{x}} = \frac{-rv_0}{x\sqrt{x^2-r^2}}$$



ترسیمی :

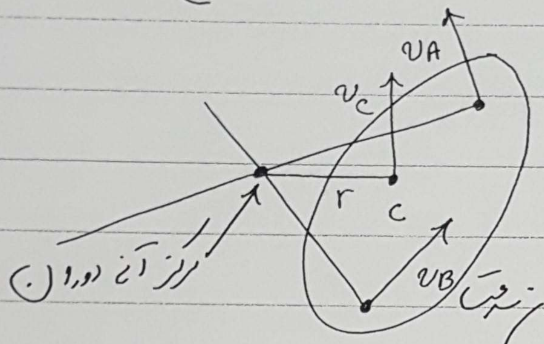


برداری توسط ما تحلیل

۴-۲) مرکز آنی دوران

در کلیه حالتها یا انواع حرکتهای گفته شده میتوان مرکز آنی دوران تعریف کرد. مرکز آنی دوران نقطه یا مکان هندسی نقاطی است که در هر لحظه دارای سرعت صفر هستند.

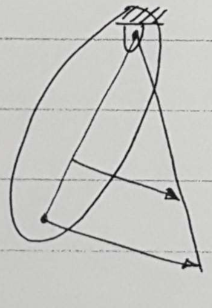
برای تعیین نقطه مرکز آنی کافیست ابتدا جهت سرعت دو نقطه مجزا روی جسم را مشخص کرده سپس دو عمود بر آن دو جهت رسم کرده، محل تلاقی این دو جهت مرکز آنی جسم در آن لحظه است.

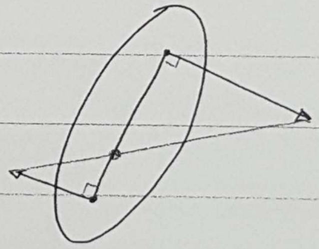


با داشتن مرکز آنی دوران سرعت سایر نقاط را میتوان مشخص کرد.

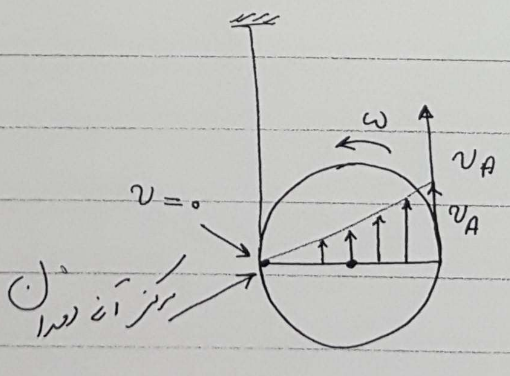
$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

در حرکت دورانی برای تعیین مرکز آنی دوران مشخص بودن سرعت (اندازه) دو نقطه کافیست.





مثال)

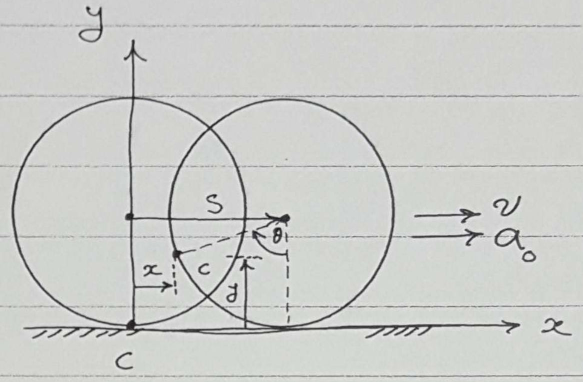


۲-۵) تحلیل حرکت شتاب دار

۲-۵-۱) روش اسکالر

$$\begin{cases} x_c = s - r\sin\theta & ; \; s = r\theta \\ y_c = r - r\cos\theta & ; \; \dot{s} = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{xc} = \dot{x}_c = \dot{s} - r\dot{\theta}\cos\theta \\ v_{yc} = \dot{y}_c = 0 + r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_{xc} = \ddot{s} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ a_{yc} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases} \; ; \; \ddot{s} = r\ddot{\theta}$$

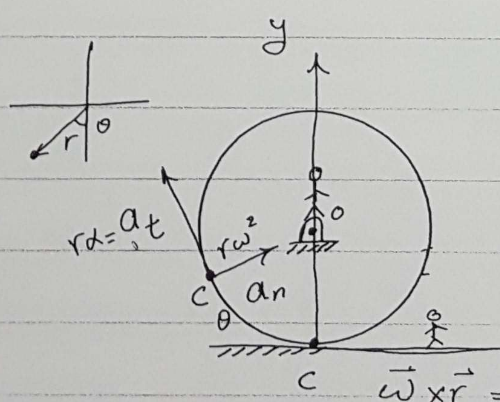
$$\vec{a}_c = [a_0(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta]\,\vec{i} + [a_0\sin\theta + r\omega^2\cos\theta]\,\vec{j}$$

۲-۵-۲) روش برداری

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$a_t = \dot{v} \; ; \; \vec{a}_\theta = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} \; ;$$

$$a_n = v^2/\rho \; ; \; \vec{a}_r = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$



$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_{c/o}$$

$$\vec{a}_0 = a_0\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{c/o} = \vec{a}_{n\,o/c} + \vec{a}_{t\,o/c}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\begin{cases} \vec{\omega} = -\omega\vec{k} \\ \vec{r} = -r\sin\theta\,\vec{i} - r\cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = (-\omega\vec{k})\times(-r\sin\theta\,\vec{i} - r\cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = r\omega\sin\theta\,\vec{j} - r\omega\cos\theta\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{n\,o/c} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = r\omega^2\sin\theta\,\vec{i} + r\omega^2\cos\theta\,\vec{j}$$

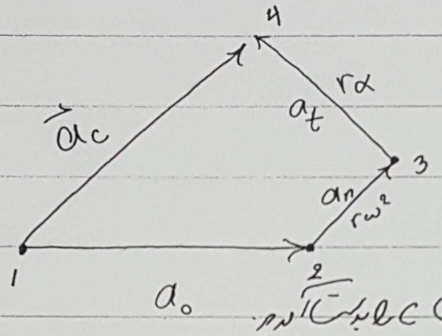
$$\vec{a}_{t\,o/c} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = (-\alpha\vec{k})\times(\vec{r})$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{a}_{t_{o/c}} = \alpha r \sin\theta\, \vec{j} - \alpha r \cos\theta\, \vec{i}$$

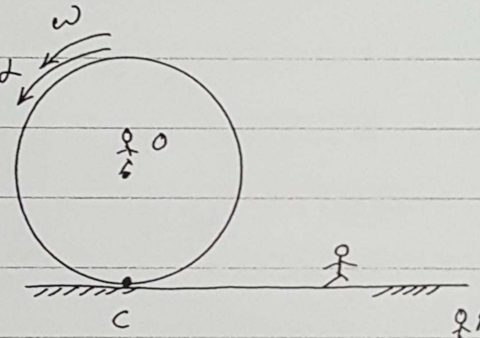
$$\vec{a}_c = (a_o + r\omega^2 \sin\theta - \alpha r \cos\theta)\,\vec{i} + (r\omega^2 \cos\theta + \alpha r \sin\theta)\,\vec{j}$$

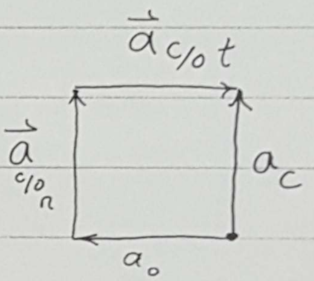
۳-۵-۲) روش ترسیمی



شکل) از روش ترسیمی شتاب c را بدست آوردیم.

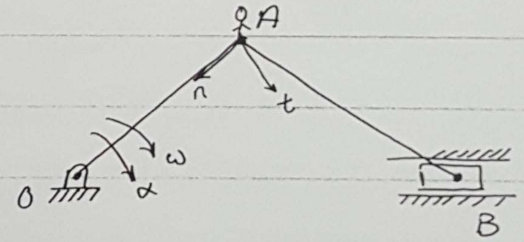
$$\vec{a}_c = \vec{a}_o + \vec{a}_{c/o}$$

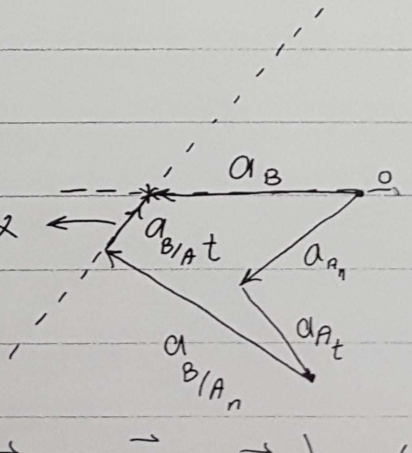


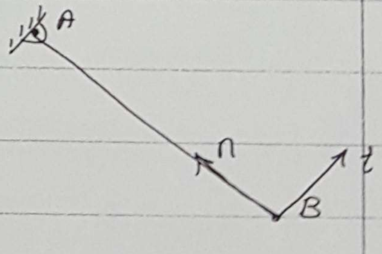


$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

شکل)



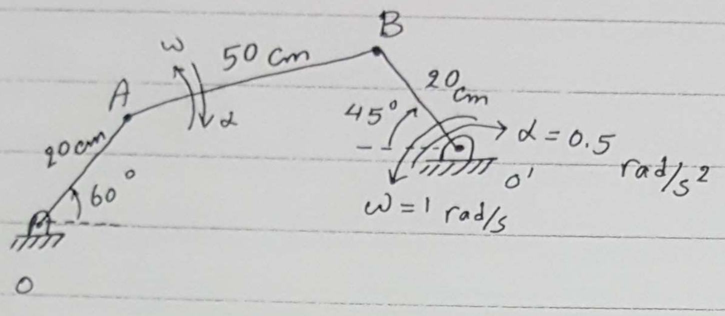




$$\vec{a}_B = \left(\vec{\omega}_{OA} \times \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA} + \dot{\vec{\omega}}_{OA} \times \vec{OA}\right) + \left(\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\omega}_{AB} \times \vec{AB}\right) + \left(\dot{\vec{\omega}}_{AB} \times \vec{AB}\right)$$

Scanned by CamScanner

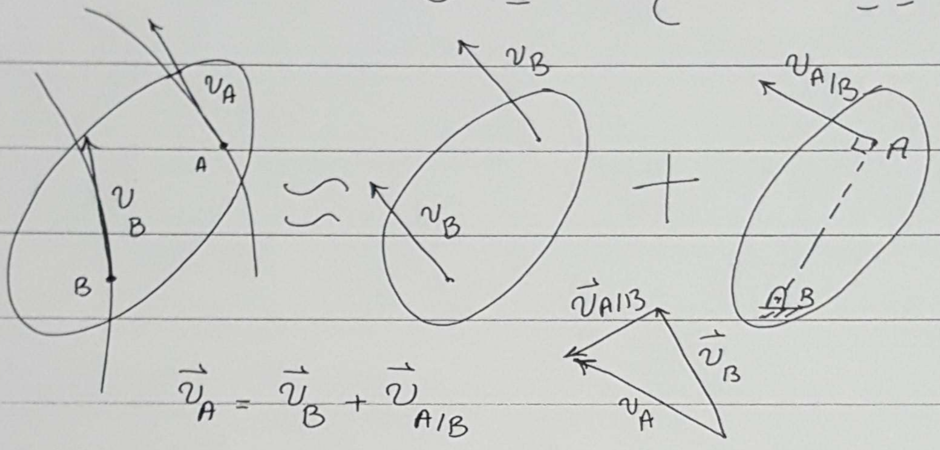
تمرین کلاسی) با استفاده از خط‌کش و گونیا تحلیل سرعت و شتاب انجام دهید



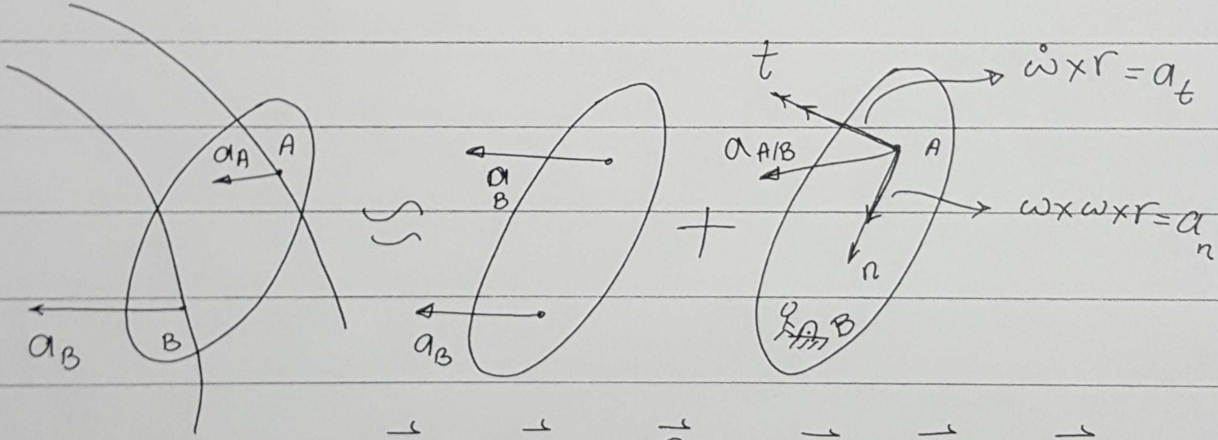
۲-۶) حرکت نسبی در دستگاه مختصات دوار

۲-۶-۱) تحلیل حرکت عمومی در حرکت نسبی

جسمی را در نظر بگیرید که دو نقطه از آن روی دو مسیر مشخص شروع حرکت کنند.



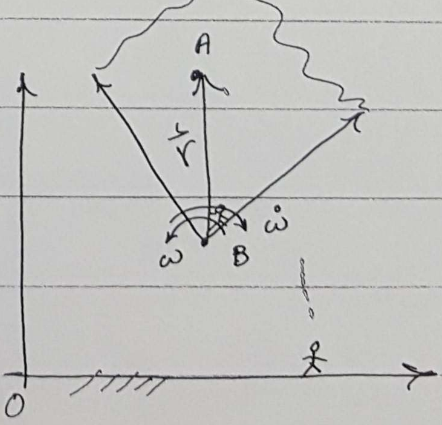
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$



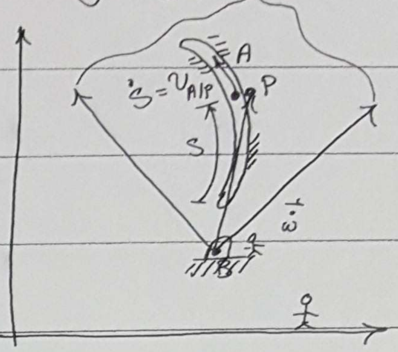
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B_n} + \vec{a}_{A/B\,t}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}$$



۲-۶-۲) حرکت نسبی داخل دستگاه دوار



رابطه بین سرعت A و B :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

رابطه بین A و P :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/P} + \vec{v}_{P/B} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + v_{rel}}$$

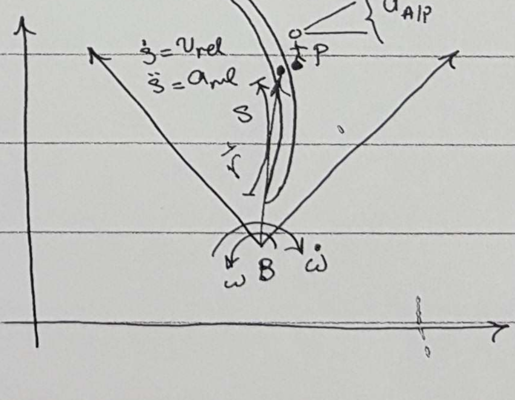
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \longrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) \quad ; \quad \vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) = \dot{x}\vec{i} + x\dot{\vec{i}} + \dot{y}\vec{j} + y\dot{\vec{j}} \quad : \begin{cases} \dot{\vec{i}} = \omega \times \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} = \omega \times \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \omega \times (x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \underbrace{v_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}}_{v_{A/B}}$$

۲-۶-۳) تحلیل شتاب حرکت نسبی در دستگاه دوار



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$$

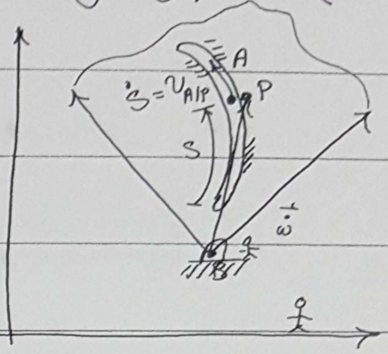
$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/P} + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

مشتق $\rightarrow$ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \omega \times \dot{\vec{r}} + \underbrace{\dot{\vec{v}}_{rel}}_{\vec{a}_{rel}} \quad ; \quad \dot{\vec{r}} = \omega \times \vec{r} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_{A/B}$

۲-۶-۲) حرکت نسبی داخل دستگاه دوار



رابطه نسبی سرعت A و B :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

رابطه نسبی A و P :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/P} + \vec{v}_{P/B} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + v_{rel}}$$

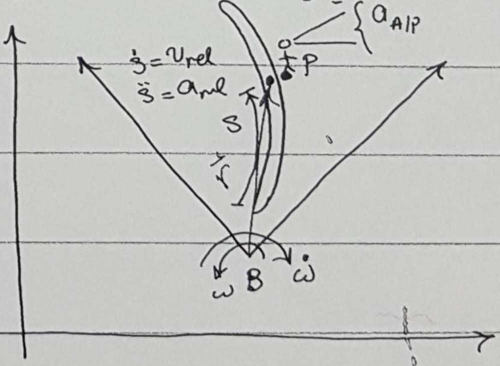
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \longrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) \; ; \; \vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{A/B}) = \dot{x}\vec{i} + x\dot{\vec{i}} + \dot{y}\vec{j} + y\dot{\vec{j}} \quad : \begin{cases} \dot{\vec{i}} = \omega \times \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} = \omega \times \vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) + \omega \times (x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \underbrace{v_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}}_{v_{A/B}}$$

۲-۶-۳) محاسبه شتاب حرکت نسبی در دستگاه دوار



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + a_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/P} + \vec{a}_{P/B}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \omega \times \dot{\vec{r}} + \underbrace{\dot{\vec{v}}_{rel}}_{\vec{a}_{rel}} \; ; \; \dot{\vec{r}} = \omega \times \vec{r} + \vec{v}_{rel} = \vec{v}_{A/B}$$

Scanned by CamScanner

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
پایگاه خوافنسا

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \underline{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}} + \vec{a}_{rel}$$

شتاب کوریولیس

ص-۱۲۹	ص-۹۸	۸۲	ص-۶۲	۴۵	ص-۲۸*	ص-۴
۱۳۳	۱۰۱	۸۴	۶۵	۴۶*	۳۱	۱۳-
۱۳۵*	۱۰۹	۸۵	۶۹	۵۲*	۳۳	۱۴
۱۴۰*	۱۱۳	۸۸	۷۲	۵۴*	۳۷	۱۸
۱۴۴	۱۱۶	۸۹	۷۴	۵۶	۴۱	۲۲
۱۴۶	۱۱۸		۷۸		۴۳	۲۴
				ص-۱۸۹	۱۷۸	ص-۱۵۲
				۱۹۱		۱۵۸
				۱۹۲		۱۶۰
				۱۹۸		۱۷۱
				۲۰۲		۱۷۳
						۱۷۷

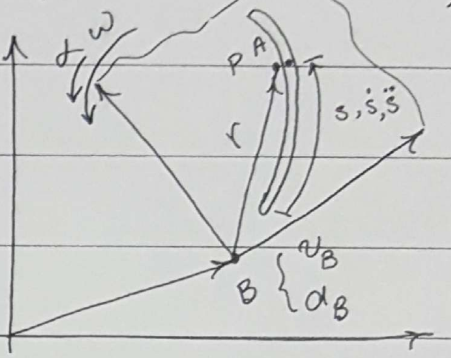
Scanned by CamScanner

(ادامه حرکت نسبی در دستگاه دوار)

$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A/P}$; $\vec{v}_{A/P} = \dot{s} = v_{rel}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B}$; $\vec{v}_{P/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

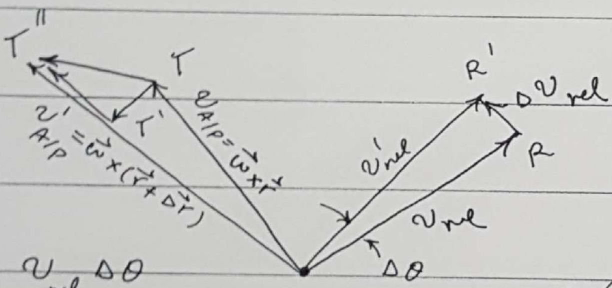
$\Longrightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$

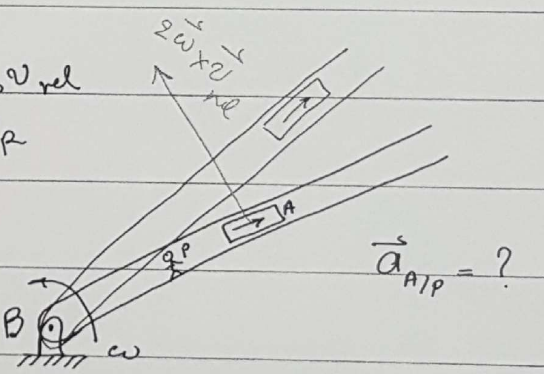


$\vec{a}_A = \vec{a}_P + \vec{a}_{A/P}$; $\vec{a}_{A/P} \overset{?}{=} \ddot{s}$

$\vec{a}_P = \vec{a}_B + \vec{a}_{P/B}$; $\vec{a}_{P/B} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

$\Longrightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{a}_{A/P}$





$\vec{a}_{A/P} = ?$

$RR' = v_{rel} \Delta\theta$

$T'T'' = v'_{A/P} - v_{A/P} = (r + \Delta r)\omega - r\omega$

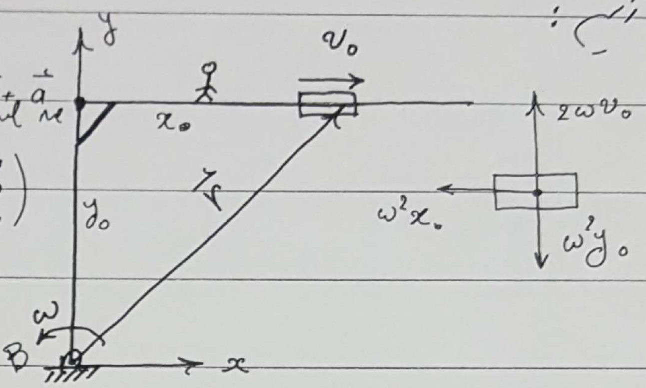
$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T'T''}{\Delta t} \right) = v_{rel} \frac{d\theta}{dt} + \omega \frac{dr}{dt} = v_{rel}\,\omega + \omega v_{rel} = 2\omega v_{rel}$$

$$\vec{a}_{A/P} = \ddot{s} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

Scanned by CamScanner

مثال) در شکل زیر یک نفر (آدم) روی میله AB با سرعت ثابت v_0 در حال حرکت است. میله نیز حول O با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در حال دوران است. مطلوبست شتاب مطلق نفر (آدم) نسبت به ناظر ثابت روی زمین:



$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

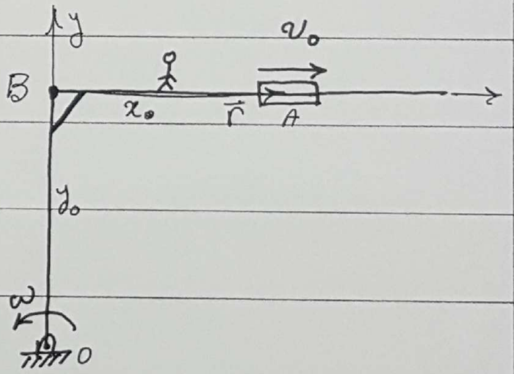
$$\vec{a}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} ;\ \vec{r} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\0\end{pmatrix} ;\ \vec{a}_{rel} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} ;\ \vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix}v_0\\0\\0\end{pmatrix} ;\ \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\omega y_0\\\omega x_0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\\omega v_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix}-\omega^2 x_0\\-\omega^2 y_0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\omega v_0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega^2 x_0\\2\omega v_0 - \omega^2 y_0\\0\end{pmatrix} = -\omega^2 x_0\,\vec{i} + (2\omega v_0 - \omega^2 y_0)\vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$



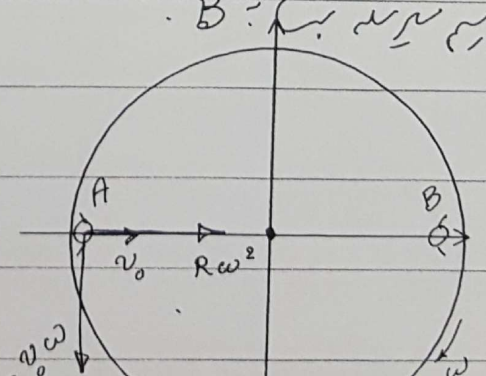
$$\vec{a}_B = \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{OB} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\y_0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\omega^2 y_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega^2 x_0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_0\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\\omega v_0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \vec{a}_A = \begin{pmatrix}-\omega^2 x_0\\2\omega v_0 - \omega^2 y_0\\0\end{pmatrix}$$

تمرین منزل: رسم مسیر نسبی B :



فصل سوم) سینتیک اجسام ذره‌ای

۳-۱) قوانین نیوتن

قانون I: اگر برآیند نیروها و گشتاورهای وارده بر یک جسم صفر باشد. جسم حالت خود را نگه می‌دارد

قانون II: نسبت برآیند نیروهای وارده به جسم به شتاب اعمالی توسط برآیند نیرو یک مقدار ثابت

$$\frac{\sum F_1}{a_1} = \frac{\sum F_2}{a_2} = \frac{\sum F_3}{a_3} = \dots = m$$ جرم

$$\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$$

$\sum F_x = m a_x \; ; \; \sum F_y = m a_y \; , \; \sum F_z = m a_z$ — نسبت به ناظر ساکن

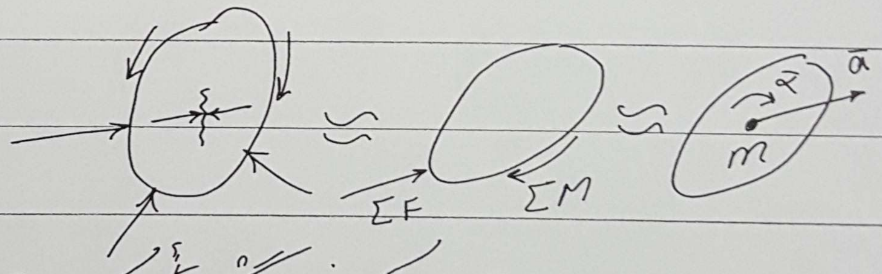
$\sum F_x - m a_x = 0 \; , \; \sum F_y - m a_y = 0$ — نسبت به ناظر متحرک (m)

قانون سوم: قانون عمل و عکس العمل

۳-۲) روش تحلیل مسائل دینامیکی

جعبه

تعریف سیستم: یک خط فرضی است که حول یک یا چند جرم کشیده می‌شود و با محیط اطراف خود نیرو یا گشتاور تبادل



دیاگرام آزاد: بعد از انتخاب سیستم، رسم کلیه نیروها و گشتاورهایی که به مرز سیستم تماس پیدا می‌کنند که به آن دیاگرام آزاد گفته می‌شود

نیروهای وارده به یک سیستم را می‌توان در دو دسته اصلی تقسیم کرد

(1) نیروهای حجمی (وزن، مغناطیسی، نیروی کوریولیس)

(2) نیروهای سطحی (نیروی ضربه، اصطکاک، عکس العمل سطح، تفاوت فشارها، نیروی فنر و نیروی بویانسی)

دیاگرام شتاب: برای سیستم معادل سیستم + $\sum F$، یا ارکان سیستم + $\bar{a}$ مرکز ثقل قرار داد

(دیاگرام آزاد — دیاگرام شتاب)

Scanned by CamScanner

روش حل مسائل : ⓪ مشخص کردن داده‌ی مسئله و مجهولات مسئله

① انتخاب سیستم

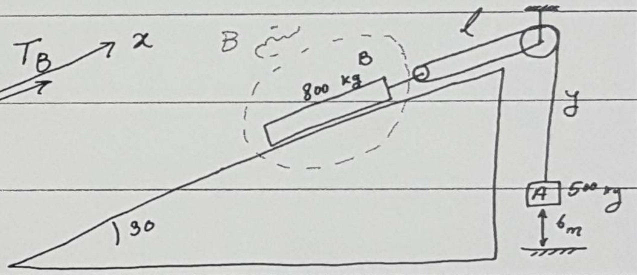
② دیاگرام آزاد

③ انتخاب دستگاه مختصات مناسب

④ اعمال قوانین نیوتن

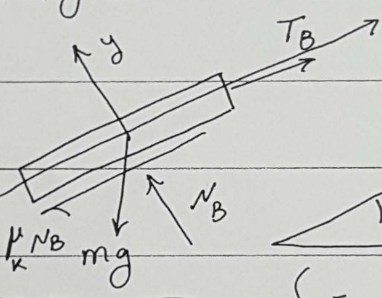
⑤ محاسبه مجهولات مسئله

مثال) در شکل زیر سیستم از حال سکون رها می‌شود، سرعت جرم A در لحظه برخورد با زمین را بیابید



$L = 2l + y \rightarrow 2\ddot{l} + \ddot{y} = 0$

$a_A = 2 a_B$ ①



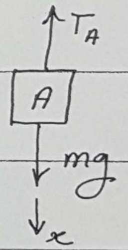
$[\Sigma F_x = m a_x]$

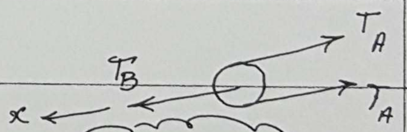
$T_B - \mu_k N_B - m_B g \sin\theta = m a_B$

$[\Sigma F_y = m a_y = 0] \Rightarrow N_B - m_B g \cos\theta = 0$

$[\Sigma F_x = m a_x]$

$m_A g - T_A = m a_A$



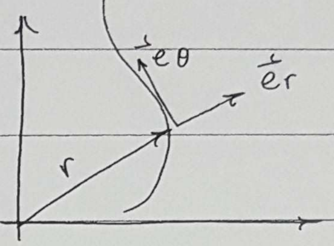


$2T_A = T_B$

از $a_A \Rightarrow v_A^2 - v_{A_0}^2 = 2 a_A h$

۳-۳) تحلیل سینتیک دینامیک در دستگاه مختصات (r,θ)

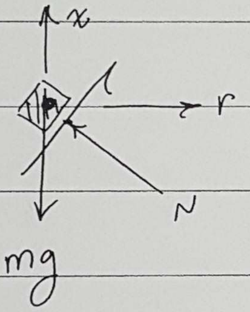
$$\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$$

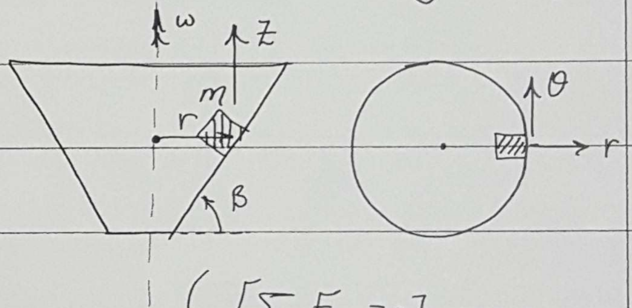


$$\begin{pmatrix}\sum F_r \\ \sum F_\theta\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}a_r \\ a_\theta\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\end{pmatrix}$$

$$\sum F_r \vec{e}_r + \sum F_\theta \vec{e}_\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

مثال) حداکثر و حداقل سرعت دورانی مخروط ناقص حول محور اصلی برای آنکه جرم m با ضریب اصطکاک μ_s در داخل مخروط حرکت نکند.





$$\left[\sum F_r = m a_r\right]$$

$$\mu_s N\cos\beta - N\sin\beta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2);\ \dot{\theta} = \omega$$

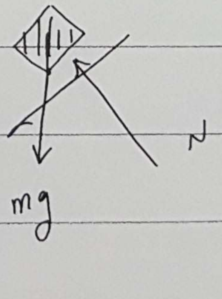
$$\frac{\mu_s\cos\beta - \sin\beta}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta}\, mg = -mr\omega^2$$

$$\left[\sum F_z = 0\right]$$

$$\mu_s N\sin\beta - mg + N\cos\beta = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos\beta + \mu_s\sin\beta}$$

$$\omega^2_{min} = -\frac{\mu_s\cos\beta - \sin\beta}{\mu_s\sin\beta + \cos\beta}\,\frac{g}{r}$$



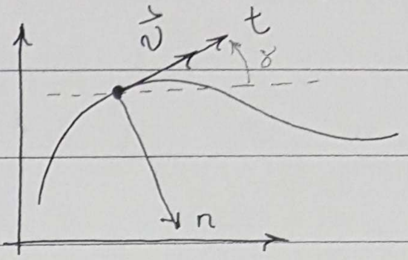
$$\omega^2_{max} = -\frac{-\mu_s\cos\beta - \sin\beta}{-\mu_s\sin\beta + \cos\beta}\,\frac{g}{r}$$

Scanned by CamScanner

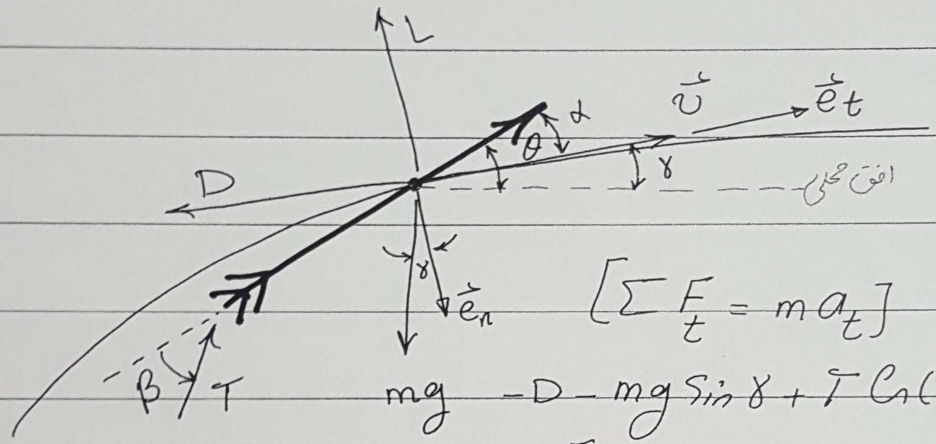
۴-۳) دستگاه مختصات (n,t)

$$\left[\sum \vec{F} = m\vec{a}\right]$$

$$\begin{pmatrix} \sum F_n \\ \sum F_t \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_n \\ a_t \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v\dot{\gamma} = \rho\dot{\gamma}^2 = v^2/\rho \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$



مثال) معادلات حرکت یک راکت را در اتمسفر بنویسید. فرض کنید نیروی مقاومت هوا $D = Kv^2$ باشد.



$$\left[\sum F_t = m a_t\right]$$

$$-D - mg\sin\gamma + T\cos(\alpha+\beta) = m\dot{v}$$

$$\left[\sum F_n = m a_n\right]$$

$$-L + mg\cos\gamma - T\sin(\alpha+\beta) = mv\dot{\gamma}$$

$$\begin{cases} m\dot{v} = T\cos(\alpha+\beta) - mg\sin\gamma - Kv^2 \\ mv\dot{\gamma} = -T\sin(\alpha+\beta) + mg\cos\gamma - L \end{cases}$$

۲+

پروژه درسی: شبیه سازی پرواز در صفحه (۲ درجه آزادی)

Scanned by CamScanner

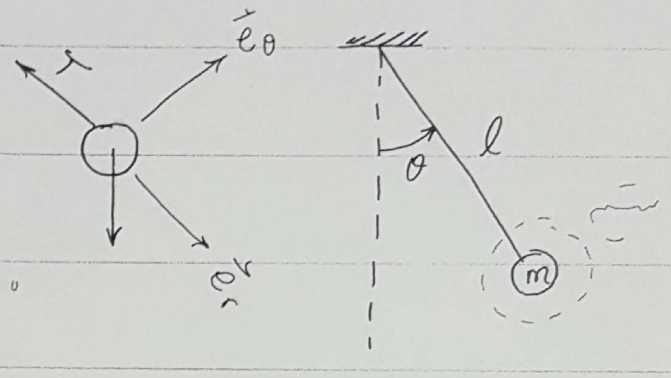
مثال) مطلوبست معادله حرکت یک پاندول و تغییرات کشش طناب در آن.

$$\left[\sum F_r = m a_r\right]$$

$$-T + mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\left[\sum F_\theta = m a_\theta\right]$$

$$-mg\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \quad ; \quad |\theta| < 6^\circ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

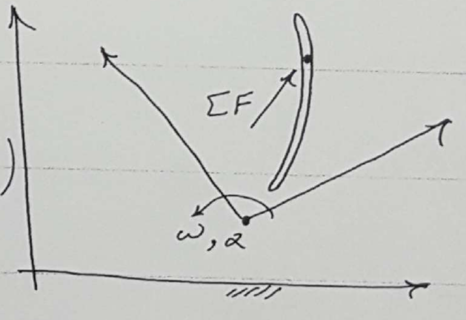
$$\Rightarrow \theta = \theta(t) \qquad \theta = A\sin\sqrt{g/\ell}\,t + B\cos\sqrt{g/\ell}\,t \; ; \; \begin{cases}\dot{\theta}(0) = \beta \\ \theta(0) = \alpha\end{cases}$$

$$T = m(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta)$$

۳-۵) دینامیک ذره در حرکت نسبی

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_A$$

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a}_B + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel})$$



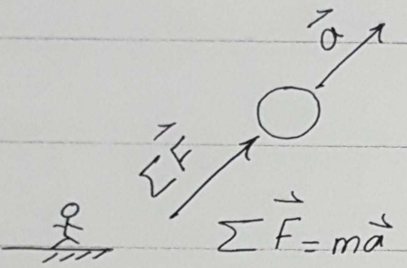
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{\text{مطلق}}$$

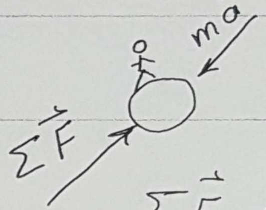
$$\sum F = m(\vec{a}_{\text{دستگاه نسبی}} + \vec{a}_{\text{نسبی}})$$

۳-۶) قانون دالامبر

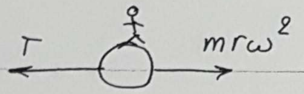
در تحلیل دینامیکی اجسام می‌توان با قرار دادن دستگاه مختصات روی جسم (چسبیده به جسم) قوانین نیوتن را تبدیل

به قوانین استاتیکی کرد. در این صورت از دید ناظر چسبیده به جسم شتاب جسم را صفر اندازه گیری می‌کند و یک نیروی ثانوی که به شخص اعمال می‌شود و برابر اندازه گیری کند. این نیرو را نیروی اینرسی گویند.

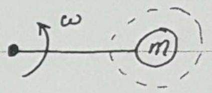




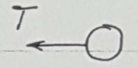
$$\Sigma\vec{F} = m\bar{a} \qquad \Sigma\vec{F} - m\bar{a} = 0$$

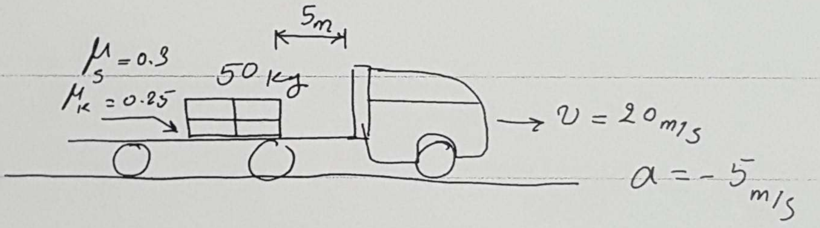


مثال)

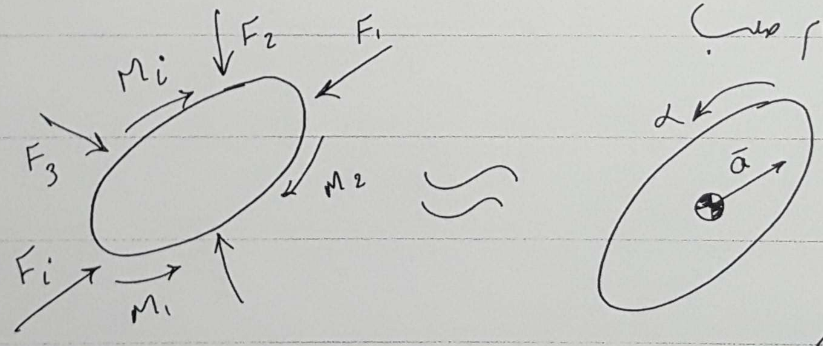


$$T - mr\omega^2 = 0 \rightarrow T = mr\omega^2 \qquad T = mr\omega^2$$





۳-۷) سینتیک اجسام صلب

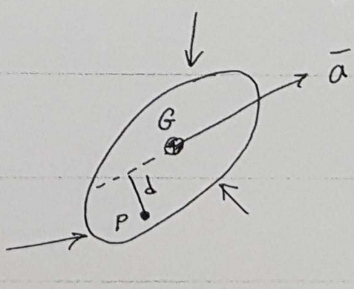


۳-۷-۱) حرکت انتقالی

در این نوع از حرکت جسم تحت یک مسیر بدون تغییر زاویه یک حرکت انتقالی انجام می‌دهد.

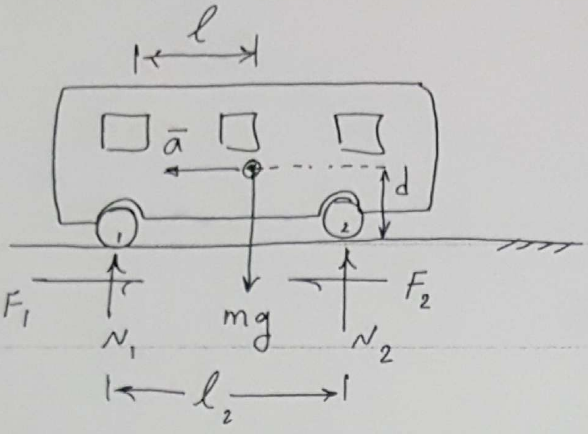
$$\alpha = 0 \;,\; \bar{a} \neq 0 \qquad \Sigma M_G = 0$$

$$\Sigma F = m\bar{a}$$



$$\Sigma M_P = m\bar{a}d$$

Scanned by CamScanner

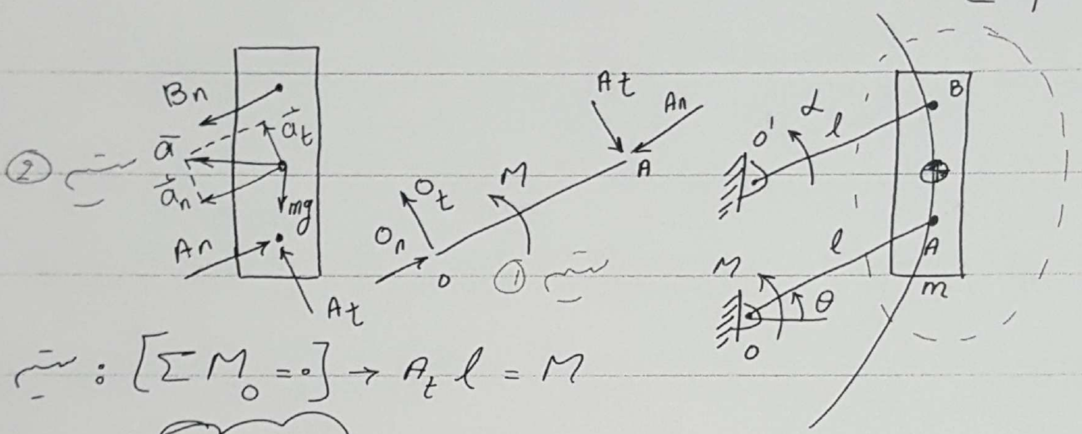


شکل)

$$\sum M_1 = m\bar{a}d$$

$$l_2 N_2 - mgl = m\bar{a}d$$

شکل) در شکل زیر نیروی اتصال در A را بدست آورید.



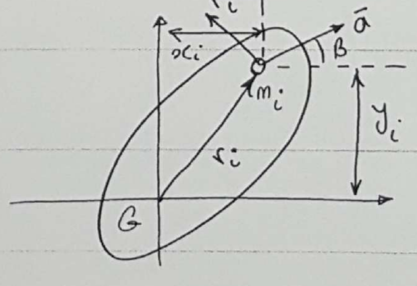
① سیستم : $\left[\sum M_O = 0\right] \rightarrow A_t\, l = M$

$$A_t = \frac{M}{l}$$

② سیستم : $\left[\sum F_t = m a_t\right] \rightarrow A_t - mg\cos\theta = m\underbrace{\alpha l}_{a_t}$

$$\sum M_A = m\bar{a}d \rightarrow B_n = ?$$

۳-۷-۲) حرکت دورانی



$$M_{G_i} = m_i \rho_i \alpha \rho_i + m_i \bar{a} \sin\beta\, x_i - m_i \bar{a}\cos\beta\, y_i$$

$$\sum M_G = \sum m_i \rho_i^2 \alpha + \bar{a}\sin\beta \sum m_i x_i - \bar{a}\cos\beta \sum m_i y_i$$

$$\sum M_G = \sum m_i \rho_i^2 \alpha \quad ; \quad \sum m_i \rho_i^2 = I_G$$

$$\sum M_G = I_G\, \alpha$$

Scanned by CamScanner

۳-۷ ، ۱۴ ، ۱۷* ، ۲۳ ، ۲۵ ، ۳۲** ، ۳۵ ، ۳۶ ، ۳۸ ، ۴۱ ، ۴۶

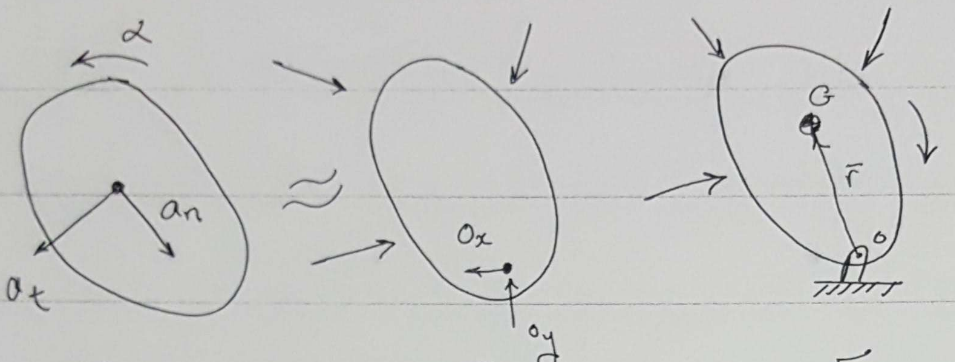
۳-۵۱ ، ۵۳ ، ۵۴* ، ۵۵ ، ۶۱ ، ۶۹ ، ۷۴ ، ۷۶ ، ۷۷** ، ۸۳ ، ۸۷* ، ۸۸ ، ۹۴* ، ۹۵ ، ۹۷**

۳-۳۰۶ ، ۳۰۸ ، ۳۱۱** ، ۳۱۳ ، ۳۱۵ ، ۳۱۷* ، ۳۲۰** ، ۳۲۲ ،

۶-۱ ، ۶-۵ ، ۶-۸ ، ۶-۱۰ ، ۶-۱۵ ، ۶-۱۸ ، ۶-۲۶* ، ۶-۳۰****** ،

Scanned by CamScanner

(ادامه حرکت دورانی)

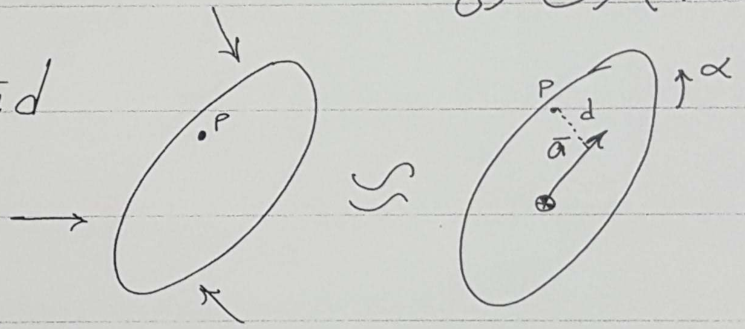


$$\left[\sum F_t = m a_t\right];\ \left[\sum F_n = m a_n\right];\ \left[\sum M_G = \bar{I}_G \alpha\right]$$

$$\sum M_O = \bar{I}\alpha + m a_t \bar{r}$$

۳-۷-۳) حرکت عمومی

$$\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$



$$I_P = \bar{I}_G + md^2$$

$$\Rightarrow \sum M_P = I_P \alpha$$

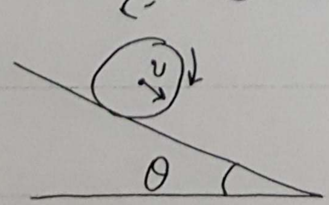
در حرکت عمومی:

$$\sum M_P = \bar{I}_G \alpha + m\bar{a}d$$

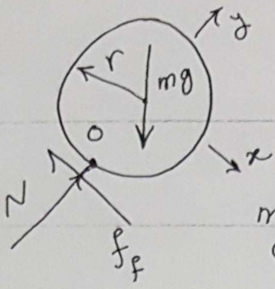
$$\sum M_P = I_P \alpha$$

مثال) یک رینگ فلزی از سطح شیب دار به سمت پایین بدون لغزش در حال پایین آمدن است.

الف) شتاب حرکت ب) نیروی اصطکاک



Scanned by CamScanner



$$\Sigma M_o = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

$$mg\sin\theta\, r = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \;;\; \bar{I} = \frac{2}{5}mr^2 \;;\; \bar{a} = r\alpha$$

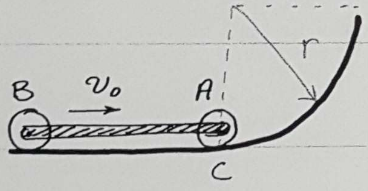
$$mg\sin\theta\, r = \frac{2}{5}mr^2\alpha + mr^2\alpha$$

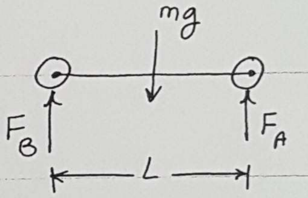
$$\alpha = \frac{5g\sin\theta}{7r} \;;\; \bar{a} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

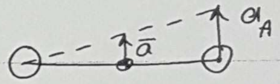
$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \longrightarrow mg\sin\theta - f_f = ma \longrightarrow f_f = \frac{2}{7}mg\sin\theta$$

$$[\Sigma F_y = 0] \longrightarrow N = mg\cos\theta$$

مثال) اهرم AB با سرعت v_0 در سطح افقی در حال حرکت است. با توجه به شکل نیروی عکس العمل سطح در چرخ A در هنگام عبور از نقطه C را بدست آورید.







$$\bar{a} = \frac{v^2}{2r}$$

$$a_A = a_B + a_{A/B} = 0 + a_{A/B\,(n)}$$

$$a_A = \frac{v^2}{r} \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{v^2}{rL}}$$

$$\Sigma M_B = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \;;\; \bar{I} = \frac{1}{12}ml^2 \;;\; \bar{a} = \frac{v^2}{2r} \;;\; d = \frac{L}{2}$$

$$F_A L - mg\frac{L}{2} = \frac{1}{12}mL^2\alpha + m\frac{v^2}{2r}\frac{L}{2}$$

$$F_A = mg\left(\frac{1}{2} + \frac{v^2}{2rg}\right)$$

۶-۳۵ ، ۳۷ ، ۴۲ ، ۴۴* ، ۴۷ ، ۵۰** ، ۵۳*** ، ۵۵ ، ۵۷ ، ۶۴** ، ۷۰ ، ۷۱*

۶-۸۱ ، ۶-۸۲ ، ۸۳ ، ۸۷ ، ۹۱*** ، ۹۴ ، ۹۶ ، ۹۸* ، ۱۰۴ ، ۱۰۷ ، ۱۰۸*

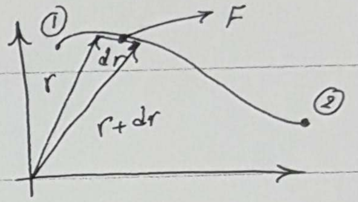
Scanned by CamScanner

فصل ۴) کار و انرژی

۴-۱) کار و انرژی اجسام ذره‌ای

یکی از مباحث مهم دینامیک که باعث راحت‌تر شدن حل مسائل می‌شود، کار و انرژی است.

✓ کار یک کمیت اسکالر است، که بصورت انتگرال خطی در طول مسیر تعریف می‌شود.



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$ {}_1W_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

✓ اگر نیروی اعمالی به جسم باعث تغییر سرعت آن شود، ایجاد انرژی جنبشی می‌کند.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\rightarrow {}_1W_2 = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})\,dt$$

$$ {}_1W_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1$$

$$ {}_1W_2 = \Delta T$$

✓ اگر انتگرال $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ روی هر مسیر بسته صفر شود، $\vec{F}$ یک نیروی بقادار (Conservative) نامیده می‌شود.

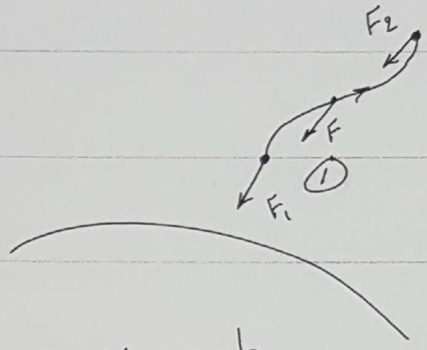
برای نیروی بقادار، انتگرال خطی آن‌ها مستقل از مسیر هستند.

Scanned by CamScanner

۲-۴) انرژی پتانسیل

اگر $V(\vec{r})$ شدت میدان اطراف یک جسم باشد، اگر هر جسمی در اطراف میدان قرار گیرد به آن نیروی گرانش صادر می‌شود.

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$$



$$g = \frac{R^2}{(R+h)^2} g_0$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

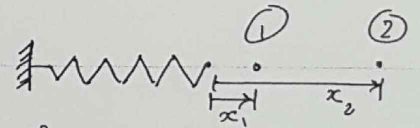
$$_1W_2 = -\Delta V \quad ; \quad V = mgh$$

$$_1W_2 = -(V_2 - V_1) = mgh_1 - mgh_2$$

$$\Delta T + \Delta V_g = 0$$

انرژی فنر:

$$F = kx$$

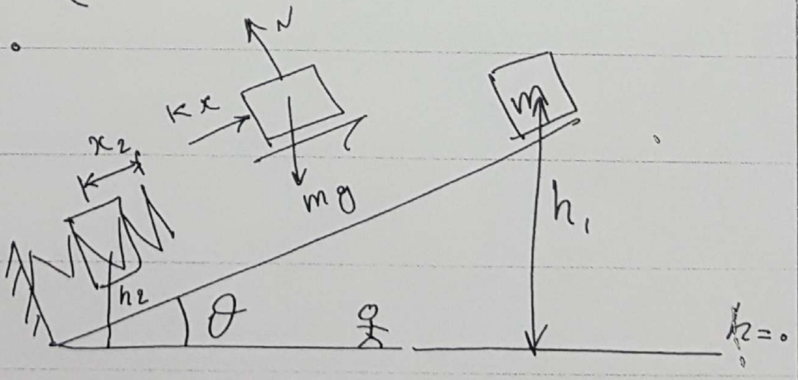


$$_1W_2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

✓ از قانون بقای انرژی بدون دخالت نیروی خارجی خواهیم داشت:

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_k = 0$$

$$\begin{cases} v_1 = \quad m/s \\ h_1 = \quad m \\ x_1 = \quad m \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2 \\ h_2 \\ x_2 \end{cases}$$



$$(T_2 - T_1) + (V_{g_2} - V_{g_1}) + (V_{k_2} - V_{k_1}) = 0$$

مراحل حل مسائل انرژی:

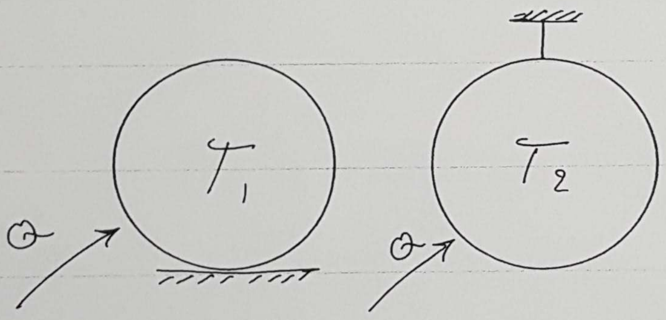
① انتخاب سیستم

② انتخاب مبداء پتانسیل جاذبه و فنر

③ یک عکس از شروع حرکت و یک عکس از پایان ماموریت خواسته شده.

④ تعیین پارامترهای v، h و x در هر عکس

⑤ قرار دادن در معادله انرژی



$T_1 < T_2$

$T_1 = T_2$

$T_1 > T_2$

۴-۳) کار و انرژی در اجسام صلب

برای اجسام صلب از روابط حل انرژی استفاده میکنیم با این تفاوت که یک ترم انرژی جنبشی دورانی به معادله انرژی اضافه میشود.

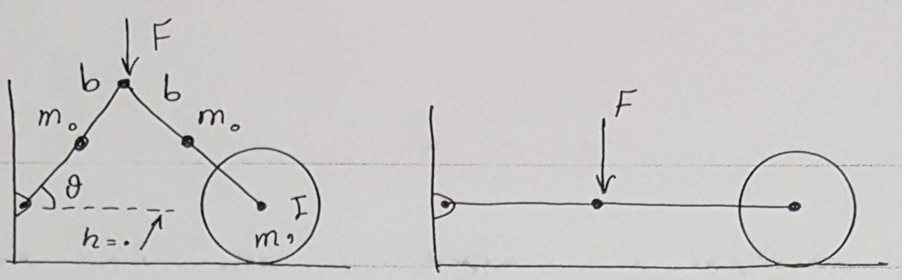
$$\Delta T_\omega = \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 - \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2$$

$$\Delta T_v + \Delta T_\omega + \Delta V_g + \Delta V_k = 0$$

درصورت وجود یک نیروی خارجی داریم:

$$\Delta T_v + \Delta T_\omega + \Delta V_g + \Delta V_k = {}_1U_2 = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ش ل)



① $\begin{cases} T_{1v} = T_{1\omega} = 0 \\ V_{g_1} = 2\, mg\, b \sin\theta \; \frac{1}{2} \end{cases}$

② $\begin{cases} T_{2v} = 0 \\ T_{2\omega} = 2\left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2\right) \; ; \; I_0 = \frac{1}{3} m_0 b^2 \\ V_{g_2} = 0 \end{cases}$

$$\Delta T_v + \Delta T_\omega + \Delta V_g + \Delta V_k = F b \sin\theta$$

$$F b \sin\theta = \frac{1}{3} m_0 b^2 \omega^2 - 2 m_0 g \frac{b}{2} \sin\theta \implies \omega = ?$$

۳-۱۰۵ ، ۱۰۸ و ۱۱۴ ، ۱۲۰ و ۱۲۷ ، ۱۳۰ و ۱۳۴ ، ۱۲۶ و ۱۴۶ و ۱۴۹ ،

۱۵۲ ، ۱۵۵ و ۱۶۱ و ۱۶۳ ، ۱۶۶ ، ۱۷۴ و ۱۷۵ و ۱۷۶ ،

۶-۱۱۵ و ۱۱۸ و ۱۲۱ و ۱۲۲ و ۱۲۶ و ۱۲۴ و ۱۲۷ ، *۱۲۹ و ۱۴۲ و ۱۴۷ و ۱۵۱

۱۶۲ ،